ملخص الجبر للصف الأول الثانوى

MR/MATH في الرياضيات

تعريف المصفوفة

هى ترتيب للعناصر فى صفوف أفقيه ☰ وأعمدة رأسية |||

نظام المصفوفة م × ن : عدد الصفوف (السطور) م وعدد الأعمدة ن
ويكون عدد العناصر م × ن = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

على سبيل المثال أ = $\begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظام ٢ × ٣

$أ_{23}$: ٢ الصفوف ، ٣ الأعمدة

بعض المصفوفات الخاصه

1. **مصفوفة الصف** ⬅ مكونة من صف واحد وأى عدد من الأعمدة
   مثال أ = (٢ ، ٧) على النظام ١ × ٢
2. **مصفوفة العمود** ⬅ مكونة من عمود واحد وأى عدد من الصفوف
   مثال أ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٧ \\ ١٠ \end{pmatrix}$ على النظام ٣ × ١
3. **المصفوفة المربعة** ⬅ عدد الصفوف = عدد الأعمدة
   مثال أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٧ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ على النظام ٢ × ٢ أو ٣ × ٣ وهكذا
4. **المصفوفة الصفرية** ▭ ⬅ جميع عناصرها أصفار وقد تكون مربعه أو ليست مربعه يعنى أى نظام
   مثال ▭$_{2\times2}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو ▭ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ على النظام ٣ × ١
5. **المصفوفة القطرية** ⬅ هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا القطر الرئيسى به أرقام ولو رقم واحد
   مثال أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ على النظام ٣ × ٣

ملاحظة
1. كل مصفوفة قطرية هى فى الأصل مربعة والعكس غير صحيح
2. القطر الرئيسى للمصفوفة أ هى العناصر $أ_{11}$ ، $أ_{22}$ ، $أ_{33}$

6. **مصفوفة الوحدة** I ⬅ هى مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسى = "١"
   مثال $I_{3\times3}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ أو $I_{2\times2}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$
7. **المصفوفة القياسية** ⬅ هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي جميعها متساوية
   مثال أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٧ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ على النظام ٣ × ٣

تساوى مصفوفتين

يجب أن تحقق
1. لهما نفس النظم
2. تساوى كل عنصر مع نظيره

مثال المصفوفتان $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ س & -١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ص \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ متساويتان إذا وفقط إذا كان س = ٣ ، ص = ٢

محور المصفوفة $أ^{مد}$

⬅ هو تبديل الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف مع الترتيب
يعنى ناخد الصف يبقى عمود أو العمود يبقى هو الصف

مثال أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ فإن $أ^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$

مثال $أ_{1\times3}$ ← $أ^{مد}_{3\times1}$

⬅ أى أنه إذا كانت أ = $أ_{م×ن}$ فإن $أ^{مد}$ = $أ_{ن×م}$

ملاحظات هامة
1. $(أ^{مد})^{مد}$ = أ
2. إذا كان $أ_{2\times3}$ فإن $أ^{مد}$ تكون على النظم ٣ × ٢
3. إذا كان I مصفوفة وحدة فإن $I^{مد}$ هى نفس المصفوفة
4. عند ضرب عدد (معامل) فى مصفوفة فإنه يضرب فى جميع العناصر داخل المصفوفة

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

لابد أن تكون المصفوفة مربعة

1. إذا كان أ = $أ^{مد}$ فإنها تكون متماثلة أو أ − $أ^{مد}$ = ▭
   ⬅ العناصر أسفل القطر الرئيسى = العناصر أعلى القطر الرئيسى
2. إذا كان أ = −$أ^{مد}$ فإنها تكون شبة متماثلة أو أ + $أ^{مد}$ = ▭
   ⬅ العناصر أسفل القطر الرئيسى = − العناصر أعلى القطر الرئيسى

ملاحظات
1. أى مصفوفة قطرية تكون متماثلة
2. شبة المتماثلة لابد أن يكون جميع عناصر قطرها الرئيسى = صفر

فى المتماثلة $أ_{32}$ = $أ_{23}$ فى شبه المتماثلة $أ_{32}$ = −$أ_{23}$

ملاحظة خلى بالك لأى مصفوفة مربعه غير صفرية
1. أ + $أ^{مد}$ = مصفوفة متماثلة
2. أ − $أ^{مد}$ = مصفوفة شبة متماثلة

شرط جمع وطرح المصفوفات أن يكون لهما نفس النظم ثم نجمع كل عنصر مع نظيرة

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظام م × ن وأن ▭ مصفوفة صفرية من نفس النظم

1. **الإنغلاق** : $أ_{م×ن}$ + $ب_{م×ن}$ = $ج_{م×ن}$
2. **الإبدال** : أ + ب = ب + أ
3. **الدمج** : أ + (ب + ج) = (أ + ب) + ج
4. **المحايد الجمعى** : أ + ▭ = ▭ + أ = أ ▭ محايد جمعى
5. **المعكوس الجمعى** : أ + (−أ) = ▭ (−أ) معكوس جمعى
6. لأى مصفوفة مربعة أ يكون : أ = $\frac{1}{2}$ (أ + $أ^{مد}$) + $\frac{1}{2}$ (أ − $أ^{مد}$)
   مصفوفة متماثلة — مصفوفة شبه متماثلة

⬅ ممكن نكتبها جمع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى شبة متماثلة

ملاحظات
1. طرح المصفوفات ليست إبدالية وليست دامجة
2. $(أ + ب)^{مد}$ = $أ^{مد}$ + $ب^{مد}$
3. $(أ + ب^{مد})^{مد}$ = $أ^{مد}$ + ب

شرط ضرب المصفوفات

$أ_{م×ن}$ × $ب_{ن×ل}$ عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

إذا كان المصفوفة أ على النظام ٢ × ٣ ، ب على النظام ٣ × ١ فإن عملية الضرب متحققه لأن عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية وينتج مصفوفة على النظام ٢ × ١

⬅ عملية الضرب تكون عن طريق ضرب الصف فى العمود وتجمع العناصر

طريقة الضرب :

نضرب عناصر الصف الأول فى عناصر كل عمود ونجمع ونكتب النواتج كصف أول
ونضرب عناصر الصف الثانى فى عناصر كل عمود ونجمع ونكتب النواتج كصف ثانى
وهكذا ياجميل انت ياحلو ....

سلم المجد بلا أطماع ما خلاص يابني

خواص عملية ضرب المصفوفات

1. **الدمج** : (أ ب) ج = أ (ب ج)
2. **المحايد الضربى** : أ I = I أ = أ ⬅ حيث أ مصفوفة مربعة فا نفس نظم I
3. **توزيع الضرب على الجمع** : أ (ب + ج) = أ ب + أ ج أو (أ + ب) ج = أ ج + ب ج

ملاحظات
1. ضرب المصفوفات ليست إبدالية أ ب ≠ ب أ
2. مدور حاصل ضرب مصفوفتين : $(أ ب)^{مد}$ = $ب^{مد}$ $أ^{مد}$
3. $(أ ب^{مد})^{مد}$ = ب $أ^{مد}$
4. $(أ ب^{مد} ج)^{مد}$ = $ج^{مد}$ ب $أ^{مد}$
5. $أ^2$ معناها أ × أ ضرب مصفوفتين وليس تربيع العناصر ، $أ^3$ = $أ^2$ أ ، $أ^4$ = $أ^2$ × $أ^2$
6. $I^ن$ = I

المحددات

محدد الرتبة الثانية : إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظام ٢ × ٢
حيث أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ فإن |أ| = أ ء − ب جـ

✔ حاصل ضرب القطر الرئيسى − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى

مثال أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن |أ| = $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ = ٤ × ٧ − ٣ × ٥ = ٢٨ − ١٥ = ١٣

محدد الرتبة الثالثة : يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣

يمكن فك المحدد عن طريق أى صف أو أى عمود مع مراعاة الإشارات كالتالى
$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

مثال فك المحدد $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$ يكون على الصورة

أ $\begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix}$ − ب $\begin{vmatrix} ء & و \\ ز & ط \end{vmatrix}$ + جـ $\begin{vmatrix} ء & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$ كده فكينا المحدد بالصف الأول

= أ (هـ ط − ح و) − ب (ء ط − ز و) + جـ (ء ح − ز هـ)

محدد المصفوفة المثلثية : هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى أو فوقه أصفار

مثال $\begin{vmatrix} أ_{11} & ٠ & ٠ \\ أ_{12} & أ_{22} & ٠ \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix}$ وقيمتة = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى = $أ_{11}$ $أ_{22}$ $أ_{33}$

مثال $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ٠ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

ملحوظة
$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٧ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٥ × ٣ × ٤ = ٦٠ مثلث الأصفار تحت القطر الرئيسى
ولكن خلى بالك من المثال ده
$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٧ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$ = − (٤ × ٣ × ٧) = −٨٤ مثلث الأصفار فوق القطر الفرعى يبقى فيه سالب

ملاحظات
1. إذا كانت أ مصفوفة مربعه على النظم م × م فإن |أ| = |$أ^{مد}$|
2. إذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث أ ب موجوده فإن |أ ب| = |أ| × |ب|
3. إذا كان أ مصفوفة على النظم ن × ن ، ك ∈ ح فإن |ك أ| = $ك^ن$ |أ|
   مثال إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان |أ| = ٤ فإن
   |٣ أ| = ٣^2 × |أ| = ٩ × ٤ = ٣٦ يعنى الثابت يخرج بره بتربيعه
4. إذا كان أ مصفوفة مربعة تحقق العلاقة أ $أ^{مد}$ = I فإن |أ| = ±١
5. إذا كان أ = −$أ^{مد}$ حيث أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن |أ| = صفر

إيجاد مساحة المثلث بإستخدام المحددات

1. إذا كان Δ س ص ع مثلث حيث س(أ ، ب) ، ص(جـ ، ء) ، ع(هـ ، و)
   ⬅ فإن مساحة سطح المثلث هى نصف المحدد = $\frac{1}{2}$ $\begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ جـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$ وحده مربعه
2. إذا كان المحدد = صفر $\begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ جـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ ⬅ ∴ س ، ص ، ع على إستقامه واحدة

حل المعادلات بإستخدام كرامر

حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين مثل أ س + ب ص = م ، جـ س + ء ص = ن
تكون المصفوفة التى عناصرها معاملات المجهولين س ، ص بعد ترتيب المعادلتين وتسمى
بمصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ ثم توجد قيمة محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ ويرمز له بالرمز Δ دلتا

● س = $\frac{Δ_س}{Δ}$ ، ص = $\frac{Δ_ص}{Δ}$ حيث Δ ≠ ٠ ⬅ م.ح = { ($\frac{Δ_س}{Δ}$ ، $\frac{Δ_ص}{Δ}$) }

ملاحظة إذا كان Δ ≠ ٠ فإن للنظام حل وحيد .
أما إذا كان Δ = ٠ فإن للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل

المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢ وكان أ ب = ب أ = I حيث I مصفوفة وحده على نفس النظم ٢ × ٢ فإن المصفوفتين أ ، ب كلا منهما معكوس ضربى للأخر

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ يكون موجود عندما محدد
أ = Δ ≠ ٠ ، ويكون $أ^{-1}$ = $\frac{1}{Δ}$ $\begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$ حيث أ $أ^{-1}$ = $أ^{-1}$ أ = I

⬅ بنبدل أماكن القطر الرئيسى ونغير إشارة القطر الفرعى
⬅ وفك المحدد عن طريق طرح القطر الرئيسى − القطر الفرعى
≪ $أ^{-1}$ يرمز المعكوس الضربى للمصفوفة أ

● **شرط وجود معكوس ضربى ؟**
1. أن تكون المصفوفة مربعة
2. محدد المصفوفة لايساوى صفر ⬅ لأن $\frac{1}{Δ}$ = $\frac{1}{٠}$ ده هيكون غير معرف فاهم ولا لأ ؟

حل المعادلات بإستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

≪ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ك_1 \\ ك_2 \end{pmatrix}$

فإن المعادلتين يمكن كتابتهم على صورة معادلة مصفوفية واحده كالآتى أ س = ج حيث
أ هى مصفوفة المعاملات ، س هى مصفوفة المجاهيل ، ج هى مصفوفة الثوابت
ويكون حل المعادلة هو : س = $أ^{-1}$ ج ⬅ م.ح = { (س ، ص) }

ملاحظات
1. $(أ ب)^{-1}$ = $ب^{-1}$ $أ^{-1}$
2. $(أ^{-1} ب)^{-1}$ = $ب^{-1}$ أ
3. أ $أ^{-1}$ = $أ^{-1}$ أ = I ⬅ مصفوفة × معكوسها الضربى = مصفوفة الوحدة
4. أ ب = I ⬅ فإن كل منهما معكوس ضربى للأخر
5. |$أ^{-1}$| = $\frac{1}{|أ|}$
6. أ س = ج فإن : س = $أ^{-1}$ ج
7. س أ = ج فإن : س = ج $أ^{-1}$

⬅ نخلى بالنا من الترتيب لإن زى ماانت عارف ياشاطر ضرب المصفوفات ليس إبدالى

MR / MATH MR. MOHAMED ELSAED

من سعى وصل حتى ، وإن شق عليه الطريق ..

المتباينات الخطية والبرمجة الخطية والحل الأمثل

حل المتباينة معناة إيجاد قيم المتغير س التى تحققها

ملاحظة إذا كان أ ≥ ب فإن :
1. أ + جـ ≥ ب + جـ ⬅ عند جمع عدد أو طرح عدد أو ضرب فى عدد موجب إتجاه المتباينة زى ماهو
2. أ جـ ≥ ب جـ حيث جـ > ٠
3. أ جـ ≤ ب جـ حيث جـ < ٠ ⬅ عند القسمه على عدد سالب نغير إتجاه المتباينة

≪ **خلى بالك** لو فيه يساوى س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
يعنى الربع الأول ∪ الأجزاء الموجبة من محورى الإحداثيات
⬅ ولو فيه يساوى تبقى الرسمه خط متصل
مفيش يساوى تبقى خط متقطع
⬅ فى مسائل إختر يتم التعويض بالنقطه التى تحقق جميع المعادلات أو المتباينات تكون هى الإختيار الصحيح وريح دماغك

س > ٠ ، ص > ٠ الربع الأول	س < ٠ ، ص > ٠ الربع الثانى
س > ٠ ، ص < ٠ الربع الرابع	س < ٠ ، ص < ٠ الربع الثالث

البرمجة الخطية

هى وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار فى حل مشكله ، أو هى الحل الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه على صورة دالة خطية (ل س + م ص) تسمى دالة الهدف فى ضوء الشروط والقيود فى المسأله وذلك لتحقيق أفضل قيمة لدالة الهدف
ثم تعين النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل والتى عندها أكبر مايمكن أو أقل مايمكن على حسب السؤال

أ / محمد السعيد عبدالعظيم
للتواصل والاستفسار 01015857548 01111692959

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي



امسح الباركود بالموبيل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه



حمل التطبيق الأن





ملازم ابتدائي



ملازم اعدادي



ملازم ثانـــــوي



كورسات ونتائج امتحانات





موقع الدكتور محمد رزق

Dr.Mo.RizK